**Методы и модели теории игр**

1 Основные понятия теории игр.

2 Решение матричных игр методами линейного программирования.

3 Игры с природой.

**1**. **Основные понятия теории игр**

Конфликтными называются ситуации, в которых сталкиваются интересы 2 и более сторон, преследуемых противоположные цели.

***Теория игр*** представляет собой математическую теорию конфликтных ситуаций. Её цель – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Основные понятия теории игр:

* конфликтующие стороны – игроки;
* одна реализация игры – партия;
* исход игры - выигрыш или проигрыш;
* развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам;
* ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию.

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложности ситуации.

Оптимальная стратегия игрока – такая, которая обеспечивает ему наилучшее положение в игре, т.е. максимальный выигрыш.

Игра называется игрой с нулевой суммой, если сумма выигрышей всех игроков равна нулю.

Парная игра с нулевой суммой называется антагонистической.

**Задача:**

Предприятие выпускает продукцию 3-х видов: А,В и С. Реализация продукции зависит от спроса, который может принимать одно из трех состояний (I, II, III,IV).

Рассматривая данные условия, как игру двух лиц, определить оптимальную пропорцию производства продукции, если игра задается следующей матрицей реализации.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вид\спрос | I | II | III | IV | αi |
| А | 4 | 3 | 4 | 2 | 2 |
| В | 3 | 4 | 6 | 5 | **3** |
| С | 2 | 5 | 1 | 3 | 1 |
| Вj | **4** | 5 | 6 | 5 |  |

α не равна β

Для определения оптимальной стратегии предприятия игрока А построим ЗЛП:

Найти min Z=p1+p2+p3 (Pi=Xi\V).

4p1+3p2+2p3>=1,

3p1+4p2+5p3>=1,

4p1+6p2+p3>=1,

2p1+5p2+3p3>=1,

Pi>=0, i=1,2,3,4.

Найти max L=q1+q2+q3+q4.

4q1+3q2+4q3+2q4<=1,

3q1+4q2+6q3+5q4<=1,

2q1+5q2+q3+3q4<=1

L= q1+q2+q3+q4+0\*q5+0\*q6+0\*q7

4q1+3q2+4q3+2q4+q5=1,

3q1+4q2+6q3+5q4+q6=1,

2q1+5q2+q3+3q4+q7=1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | Cj | Ao | q 1 | q 2 | q 3 | q 4 | q 5 | q 6 | q 7 | θ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| q 5 | 0 | 1 | 4 | 3 | 4 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1\4 |
| q 6 | 0 | 1 | 3 | 4 | 6 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1\3 |
| q 7 | 0 | 1 | 2 | 5 | 1 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1\2 |
| Lj-Cj | |  | -1 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 |  |
| . . . . . . . . . . . . . | | | | | | | | | | |
| q 1 | 1 | 3\14 | 1 | 1\2 | 4\7 | 0 | 5\14 | -1\7 | 0 |  |
| q 4 | 1 | 1\14 | 0 | 1\2 | 6\7 | 1 | -3\14 | 2\7 | 0 |  |
| q 7 | 0 | 5\14 | 0 | 5\2 | -19\7 | 0 | -1\14 | -4\7 | 1 |  |
| Lj-Cj | | 2\7 | 0 | 0 | 3\7 | 0 | 1\7 | 1\7 | 0 |  |

1\V=2\7, следовательно V=7\2=3,5 ден.единиц.

Pi=Xi\V, Xi=Pi\*V

X1=P1\*V X1=1\7\*7\2=1\2

X2=P2\*V X2=1\7\*7\2=1\2

X3=P3\*V X3= 0\*7\2=0

Х1+Х2+Х3=1 1\2+1\2+0=1

**Это означает, что 1\2 всей продукции – А, 1\2 – В и следует отказаться от продукции С.**

*Основная теория теории игр.*

Любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет хотя бы одно решение – пару оптимальных стратегий, в общем случае смешанных, и соответствующую цену игры.

Если цена игры больше нуля, тогда игра выгодна игроку А.

Если цена игры равна нулю, игра одинаково выгодна обоим игрокам.

Пример: 2 игрока А и В одновременно и, не сговариваясь, показали 1,2 и 3 пальца. Выигрыш определяется общим количеством пальцев: если оно четное, то выигрывает А и получает у В сумму, равную этому количеству, если нечетное – наоборот.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | В1 | В2 | В3 | α i |
| А1 | 2 | -3 | 4 | -3 |
| А2 | -3 | 4 | -5 | -5 |
| А3 | 4 | -5 | 6 | -5 |
| β j | 4 | 4 | 6 | 4\-3 |

Х\* = (1\4, 1\2, 1\4)

У\* = (1\4, 1\2, 1\4)

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

– комбинаторные игры, в которых правила дают возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и практически игрок не в состоянии их всех перебрать и проанализировать;

– азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Азартными играми теория игр не занимается;

– стратегические игры, в которых полная неопределенность исхода вызвана тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

**2 Решение матричных игр методами линейного программирования**

Принцип минимакса. Принцип оптимальности в антагонистических играх, выражающий стремление каждого из игроков к получению наибольшего гарантированного выигрыша, что, соответственно, максимально увеличит проигрыш соперника.

Решения игр в смешанных стратегиях. Если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, то игроки будут многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью. Такая стратегия в теории игр называется смешанной стратегией. Смешанная стратегия игрока - это полный набор его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Геометрический метод. Решение игры в смешанных стратегиях допускает геометрическую интерпретацию, и, следовательно, решение задачи можно показать графически.

Метод линейного программирования. Линейное программирование -- раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

Игровые модели в условиях коммерческого риска. Для принятия решений в условиях риска используют методы теории вероятностей по причине массовости явления. В таком случае факторы, например, состояния среды представляют собой либо случайные величины, либо случайные функции. Они описываются какими-либо статистическими характеристиками, например, математическим ожиданием и дисперсией, и обладают статистической устойчивостью. Принимающий решение ориентируется на средние, наиболее вероятные результаты, однако при этом не исключен риск получения не того результата, на который была рассчитана коммерческая стратегия, тогда мерой риска следует считать среднее квадратическое отклонение.

Пример.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **В1** | **В2** | **В3** | **В4** | **В5** | **di** |
| **A1** | 3 | 4 | 5 | 2 | 3 | 2 |
| **A2** | 1 | 8 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| **A3** | 10 | 3 | 1 | 7 | 6 | 1 |
| **A4** | 4 | 5 | 3 | 4 | 8 | 3 |
| **Bj** | 10 | 8 | 5 | 7 | 8 | 5 |

Max из min выигрышей игрока А называется нижней ценой игры с природой. α=max min aij = 3(А4).

Min из max выигрышей игрока В называется верхней ценой игры с природой. β=min max aij = 5(В3).

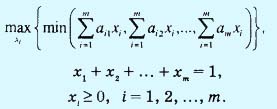
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **B1** | **B2** | **B3** | **B4** | **α i** |
| **A1** | 2 | 4 | 7 | 5 | 2 |
| **A2** | 7 | 6 | 8 | 7 | 6 |
| **A3** | 5 | 3 | 4 | 1 | 1 |
| **β j** | 7 | 6 | 8 | 7 | 6\6 |

α =β=6

Общее значение α и β называется ценой игры (V). Стратегии α I и β j (A2, B2), при которых этот выигрыш достигается, называются оптимальными чистыми стратегиями, а их совокупность – решением игры.

Теория игр находится в тесной связи с линейным программированием, так как любую конечную игру двух лиц с нулевой суммой можно представить в виде задачи линейного программирования и наоборот. Дж. Данциг отмечает, что, когда в 1947 году создатель теории игр Дж. фон Нейман впервые ознакомился с симплекс-методом, он сразу установил эту взаимосвязь и обратил особое внимание на концепцию ***двойственности*** в линейном программировании. Этот шаг иллюстрирует решение матричных игр методами линейного программирования.

Оптимальные значения вероятностей **xi**, **i = 1, 2, ..., m**, игрока **А** могут быть определены путем решения следующей максиминной задачи.



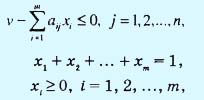
Чтобы сформулировать эту задачу в виде задачи линейного программирования, положим

http://it.kgsu.ru/IO/images/ris22_2.jpg

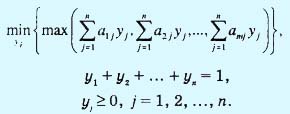
Отсюда следует, что

http://it.kgsu.ru/IO/images/ris22_3.jpg

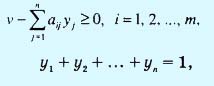
Задача игрока А может быть записана в виде



Отметим последнее условие, что цена игры **v** может быть как положительной, так и отрицательной. Оптимальные стратегии **y1**, **y2**, ...,**yn** игрока **В** определяются путем решения задачи.



 Используя процедуру, аналогичную приведенной выше для игрока **А**, приходим к выводу, что задача для игрока **В** сводится к следующему.



http://it.kgsu.ru/IO/images/ris22_6_2.jpg

  Две полученные задачи оптимизируют одну и ту же (не ограниченную в знаке) переменную **v**, которая является ценой игры. Причиной этого служит то, что задача игрока **В** является двойственной к задаче игрока **А**. Это означает, что оптимальное решение одной из задач автоматически определяет оптимальное решение другой.

    На следующем шаге рассмотрим ***пример решения задачи линейного программирования*** с использованием пакета «Поиск решения».

Для производства столов и стульев имеются ресурсы трех видов: доски 1-го типа — 500 м, доски 2-го типа - 290 м и трудовые ресурсы 440 чел.-ч. От реализации столов организация получает прибыль в размере 12 у.д.е., стульев - 5 у.д.е. Затраты ресурсов на единицу изделия представлены в таблице 1.

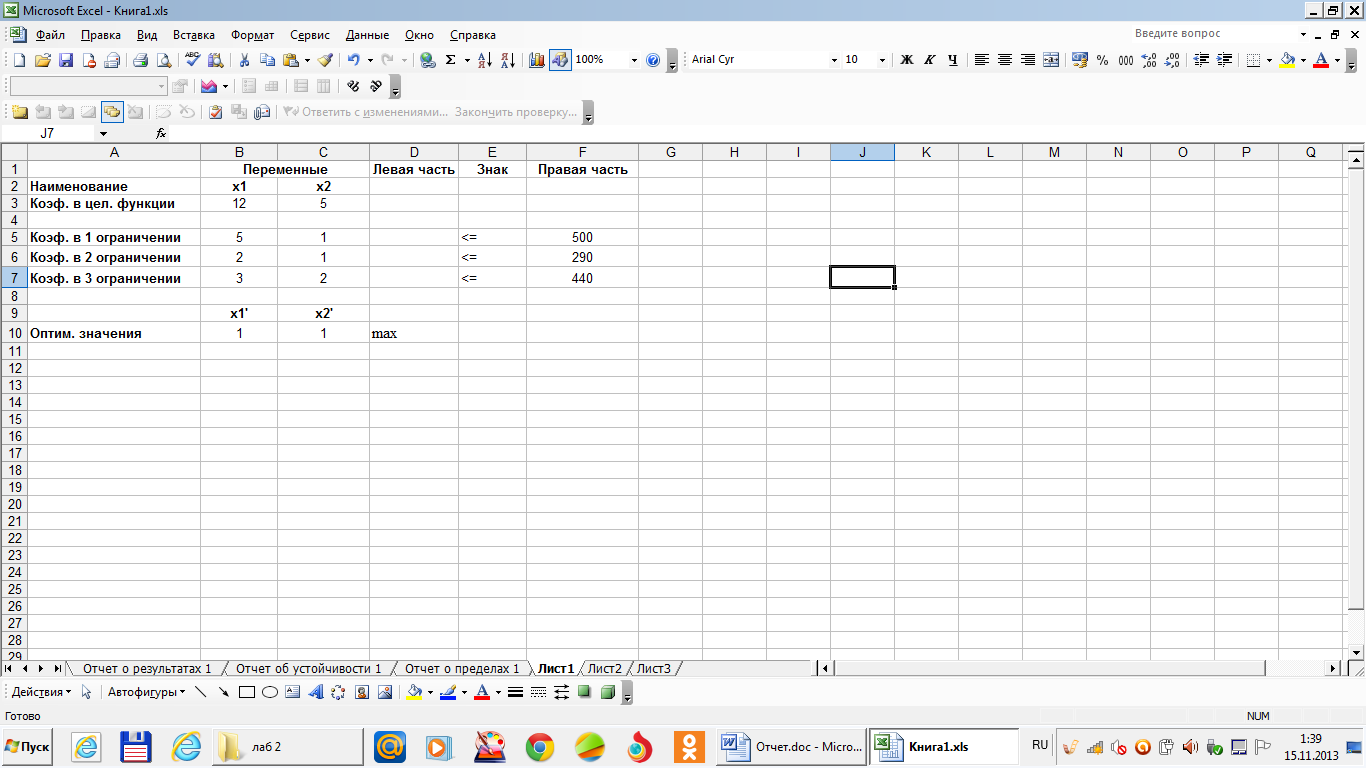
Таблица 1 - Исходные данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Столы | Стулья |
| доски 1 типа, м | 5 | 1 |
| доски 2 типа, м | 2 | 1 |
| трудовые ресурсы, чел.-ч | 3 | 2 |

Определить выпуск продукции при максимальной прибыли

Решение задач линейного программирования производится с помощью решающего блока Solver меню Сервис – Поиск решения. Последовательность действий такова. Вводятся исходные данные. Вводятся зависимости из математической модели. Из меню сервис открывается диалоговое окно Поиск Решения, в котором вводятся ячейка целевой функции, ее назначение, изменяемые ячейки и добавляются ограничения. В опции Параметры должен стоять флажок у линейной модели.

Ввод данных показан на рисунке.



Зависимости представляют собой левые части ограничений и целевую функцию. Данную операцию можно выполнить с помощью функции СУММПРОИЗ, где в первый массив вводятся коэф-ты соответствующего ограничения, а во второй – переменные х0, х1, х2, точнее ячейки, где мы присвоили им инициирующие значения – B10:F10.

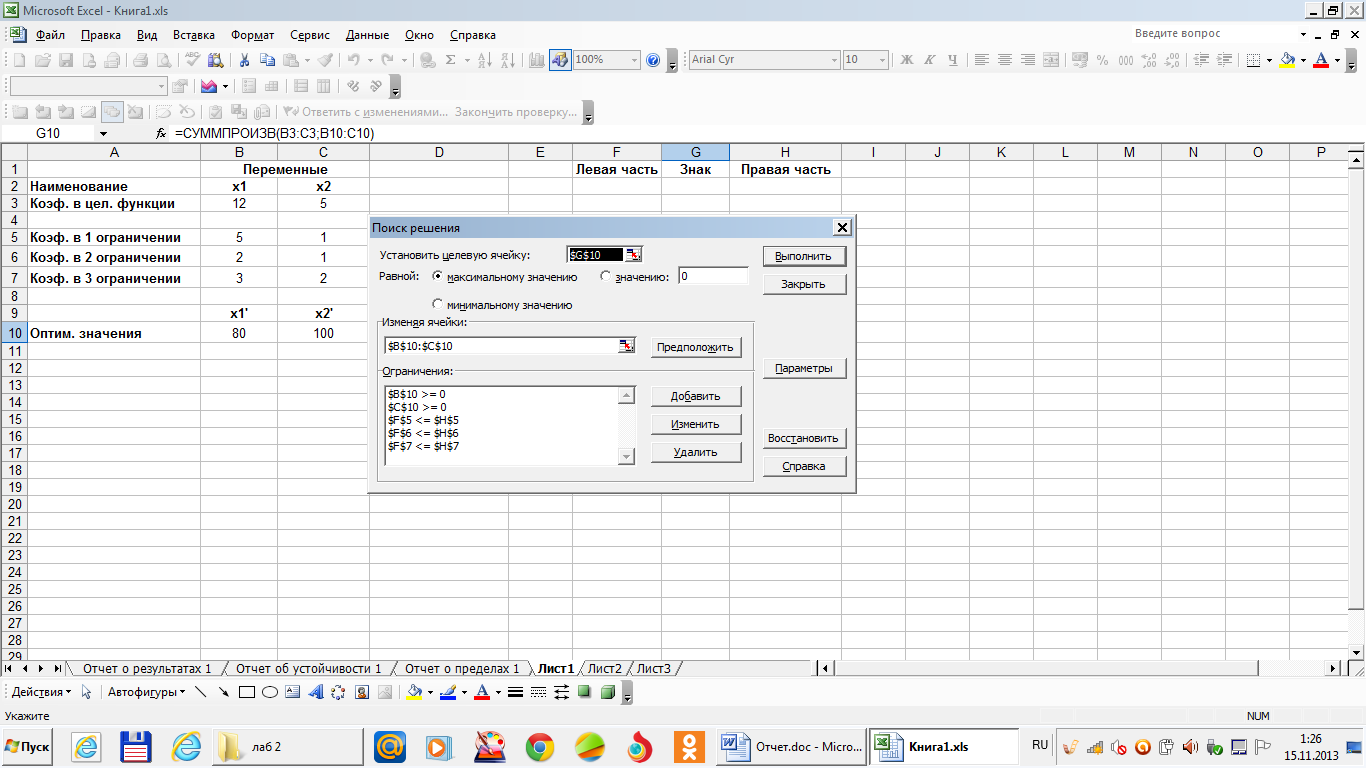
Далее в следующей последовательности будем выполнять операции.

1. Из меню Сервис откроем панель Поиск Решения.

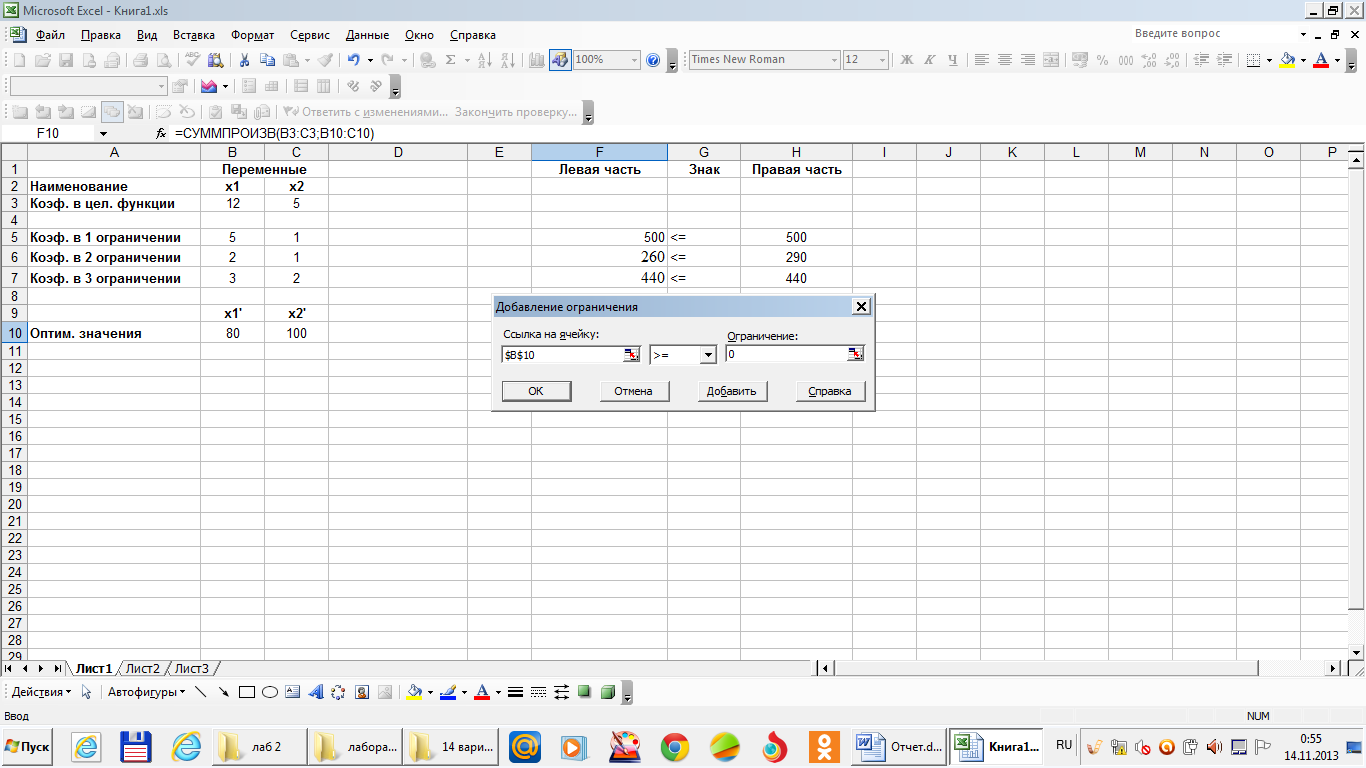
2. В поле Установить введем $G$10.

3. Из группы Равной выберем – максимальному.

4. В поле области Изменяя ячейки введем $B$10:$С10$.



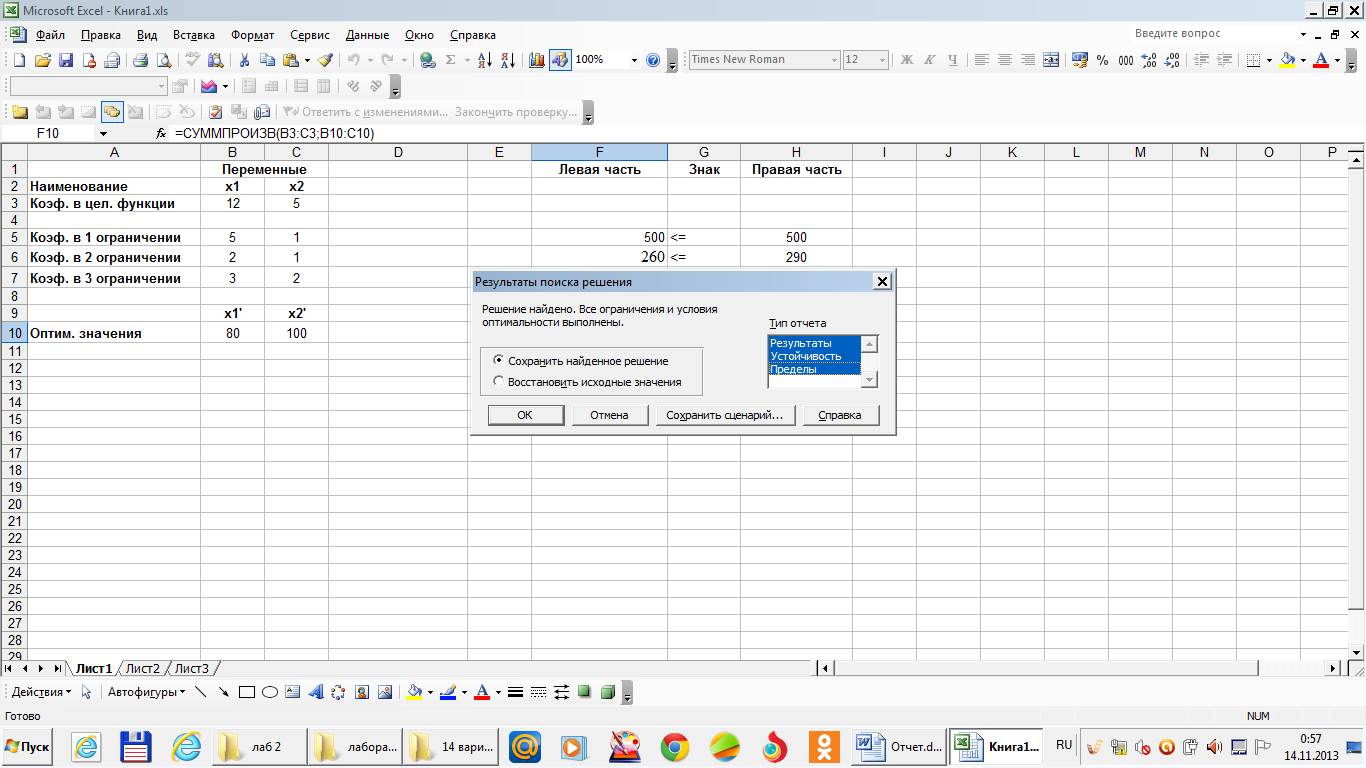
5. Нажав кнопку Добавить, откроем диалоговое окно добавление ограничений



Через данное окно введем ограничения в соответствии со знаками исходной модели. В нашей задаче левые части должны быть меньше либо равны правым и переменные должны быть положительны.

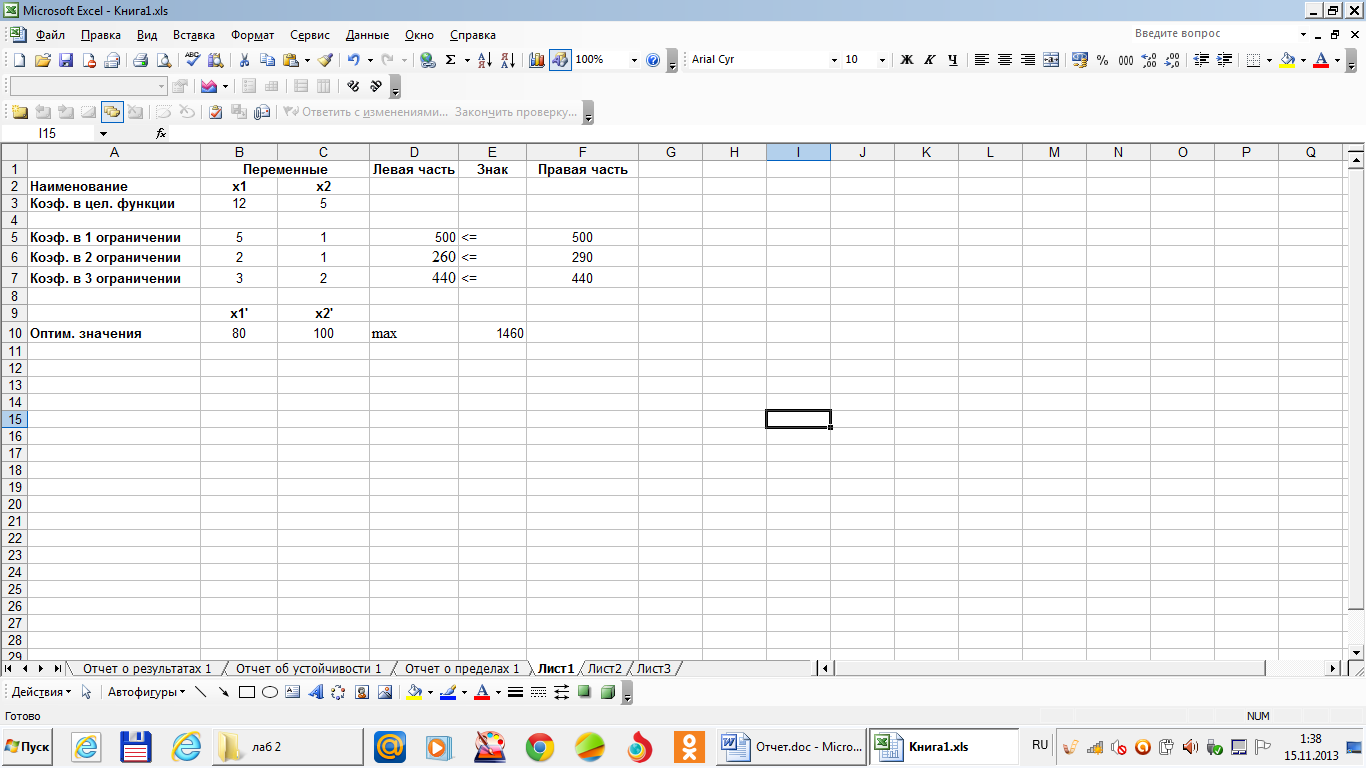
Открыв окно **Параметры поиска решения** можно изменять параметры Максимальное время или Предельное число итераций. Если не устраивает погрешность, ее также можно изменить.

После нажатия кнопки ОК вновь появится диалоговое окно Поиск решения. При нажатии кнопки Выполнить выведется окно Результаты поиска решения.

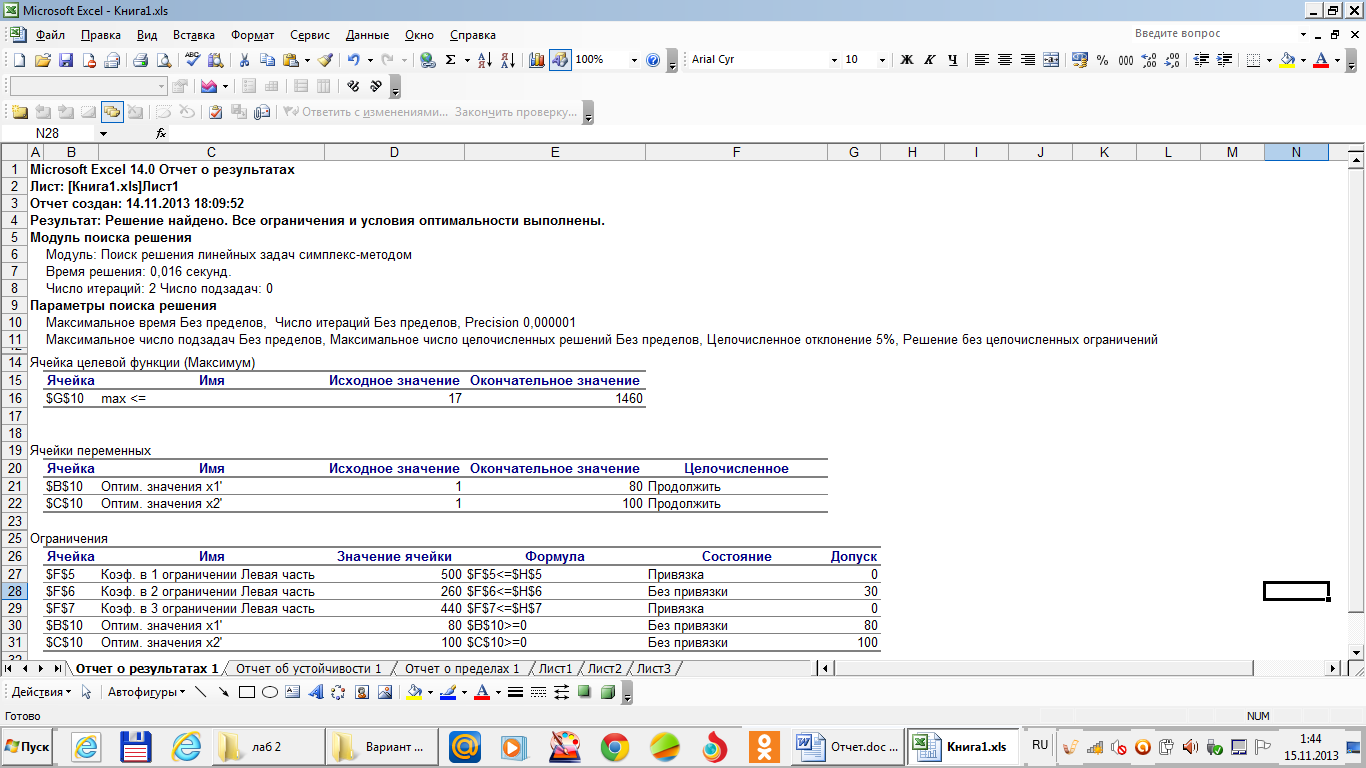


Так как решение найдено, выведем все 3 типа отчета: отчет по результатам, устойчивости и по пределам.

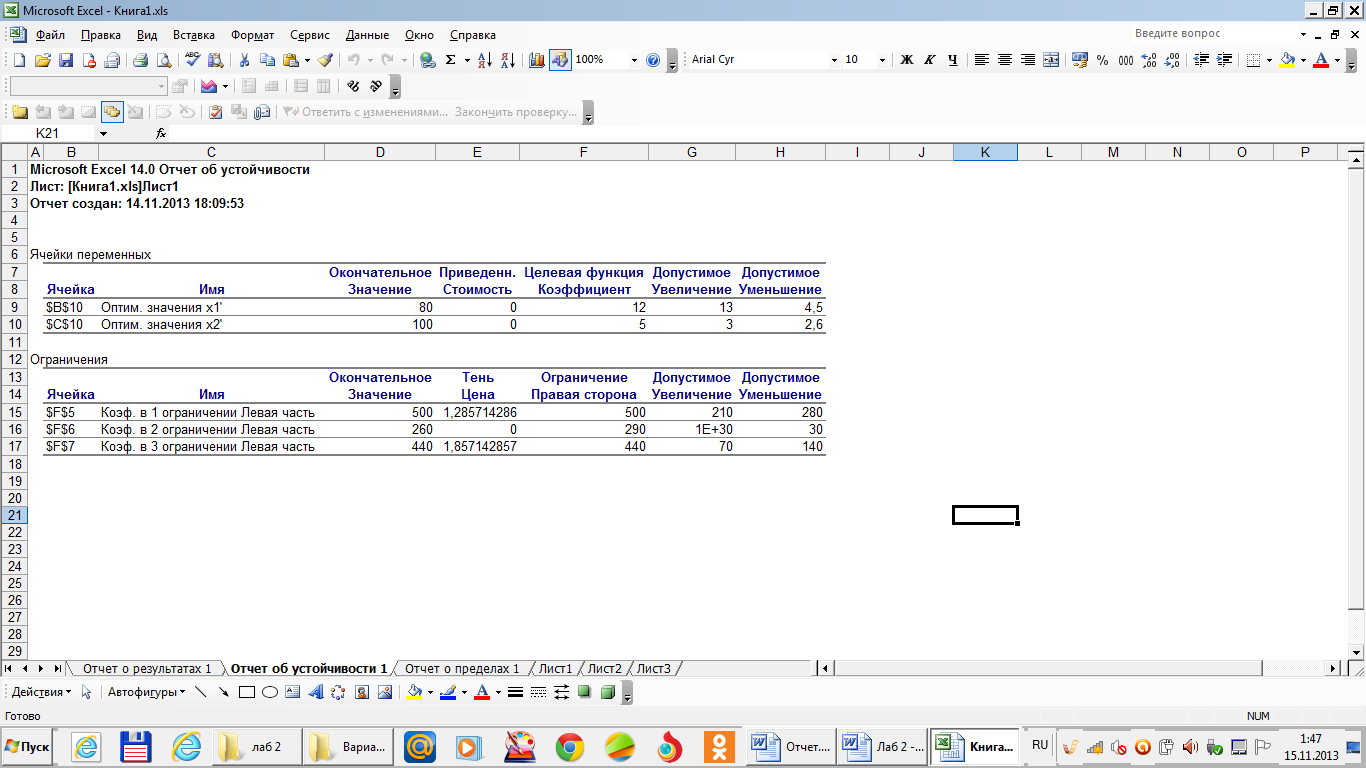
Решение задачи показано на рисунке:



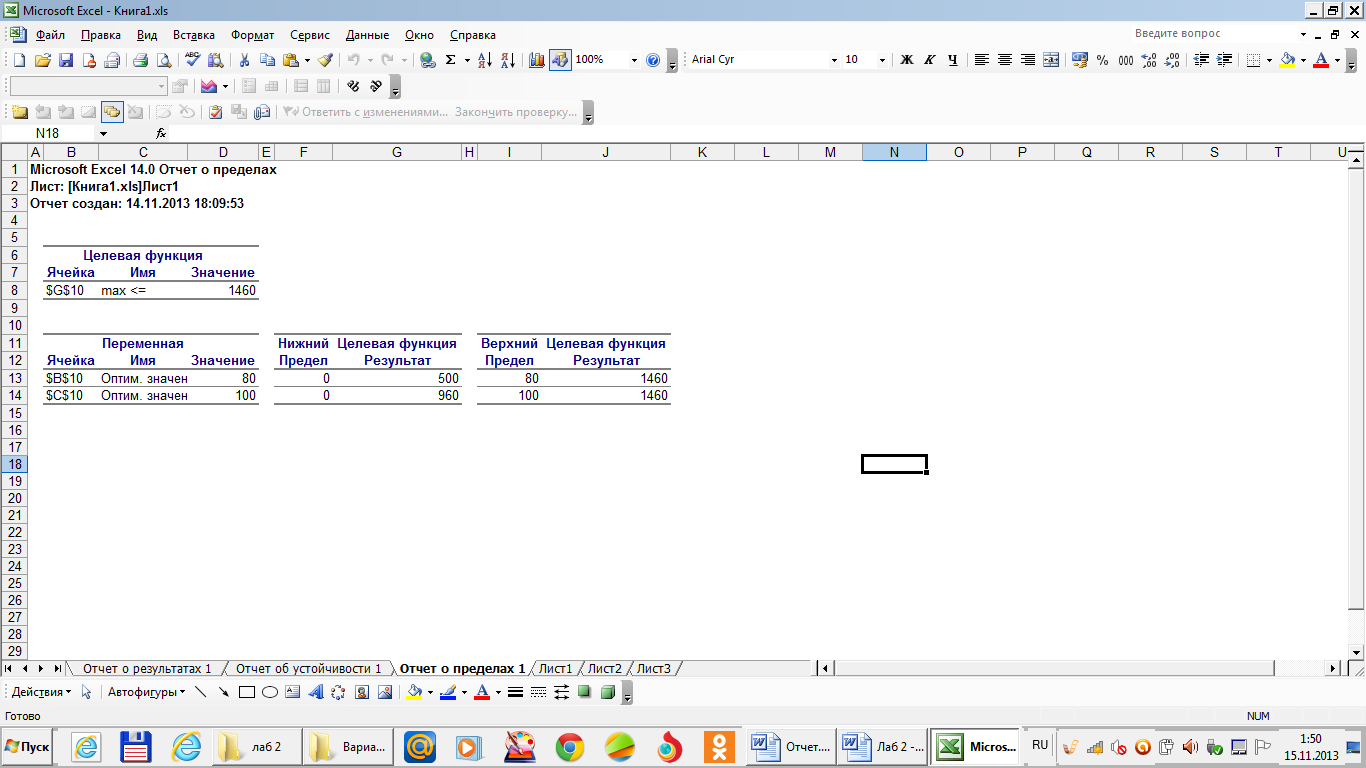
В отчете по результатам приведены сведения о целевой функции, значениях искомых переменных и результаты оптимального решения для ограничений:



В отчете по устойчивости дан анализ по переменным и ограничениям:



В отчете по пределам показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:



**Выводы**

Необходимо произвести 80 столов и 100 стульев для получения максимальной прибыли производства продукции = 1460 у.д.е.

Из отчета по устойчивости допустимые значения увеличения и уменьшения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение, по каждому виду сырья соответственно равны

|  |
| --- |
| 13 |
| 3 |

и

|  |
| --- |
| 4,5 |
| 2,6 |

Теневые цены, т.е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении сырья на единицу, по каждому виду сырья соответственно равны (1,29;0;1,86).

**3 Игры с природой**

В задачах теоретических статистических решений неизвестные условные операции зависят не от сознательно действующего противника или других участников конфликта, а от объективной действительности, которой принято называть природой, под которой понимается некоторая незаинтересованная инстанция, поведение которой неизвестно, но во всяком случае не злонамеренно.

Р*ij*  игрока А при исполнении стратегии Аi в условии Вj называется разностью между выигрышем, который мы получили бы, если бы знали условие Вj и выигрышем, который мы получим, не зная их и выбирая стратегию ai.

– риск

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 1 | 4 | 5 | 9 |
| А2 | 3 | 8 | 4 | 3 |
| А3 | 4 | 6 | 6 | 2 |
| Βj | 4 | 8 | 6 | 9 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 3 | 4 | 1 | 0 |
| А2 | 1 | 0 | 2 | 6 |
| А3 | 0 | 2 | 0 | 7 |

Возможны 2 постановки задачи при выборе решений в игре с природой: при одной нам желательно получить максимальный выигрыш, а при другой минимальный риск.

Критерий Вальда α= max min aij

I j

Критерий Сэвиджа S= min max Pij

I j

Критерий Гурвица H=max { λ min aij +(1- λ ) max aij}, 0 < λ< 1.

I j

Ситуации, в которых риск связан не с сознательным противодействием противоположной стороны (среды), а с недостаточной осведомленностью о ее поведении или состоянии лица, принимающего решение, называются «играми с природой». В таких играх человек старается действовать осмотрительно, например, используя стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш. Второй игрок (природа) действует незлонамеренно, совершенно случайно, возможные стратегии его известны (стратегии природы). Такие ситуации исследуются с помощью теории статистических решений.

Игровые модели в условиях полной коммерческой неопределенности. В таких случаях для определения наилучших решении используются следующие критерии: максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Критерий максимакса основан на том предположении, что принимающий решение действует осторожно и избирает чистую стратегию, гарантирующую ему наибольший (максимальный) из всех наихудших (минимальных) возможных исходов действия по каждой стратегии. С позиций максиминного критерия Вальда природа рассматривается как агрессивно настроенный и сознательно действующий противник типа тех, которые противодействуют в стратегических играх. В соответствии с критерием Вальда из всех самых неудачных результатов выбирается лучший. Риск является основой минимаксного критерия Сэвиджа, согласно которому выбирается такая стратегия, при которой величина риска принимает минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица при выборе решения рекомендует руководствоваться некоторым средним результатом, характеризующим состояние между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом.

Игровые модели конфликтов. Математическая теория игр дает научно обоснованные рекомендации поведения в конфликтных ситуациях, показывая «как играть, чтобы не проиграть». Для применения этой теории необходимо уметь представлять конфликты в виде игр. В процессе коммерческих переговоров приходится искать область взаимных интересов, позволяющую найти компромиссное решение. Делая большие уступки по менее значимым аспектам для фирмы, но более значимым для оппонента, коммерсант получает больше по другим позициям, которые более значимы и выгодны для фирмы. Эти уступки имеют минимальные и максимальные границы интересов. Это условие получило название «принцип Парето» по имени итальянского ученого В. Парето. Одним из типичных социально-психологических межличностных конфликтов является несбалансированное ролевое взаимодействие. Теоретическую основу анализа межличностных конфликтов предложил американский психолог Э. Берн, который дал описание взаимодействия партнеров в виде сетевых моделей. Каждый человек в процессе взаимодействия с окружающими вынужден играть более десятка ролей, причем далеко не всегда успешно. В предлагаемой модели каждый партнер может имитировать роль старшего, равного или младшего. Если ролевое взаимодействие сбалансировано, то общение может развиваться бесконфликтно, иначе при дисбалансе ролей возможен конфликт.

Пример решения «игры с природой»

*Пример1:* Фирма планирует реализацию своей продукции на рынках, учитывая возможные варианты покупательского спроса Пj, j=1͞,4 (низкий, средний, высокий, очень высокий). На предприятии разработано три стратегии сбыта товаров A1, А2, А3. Объем товарооборота (ден.ед.), зависящий от стратегии и покупательского спроса, представлен в таблице.

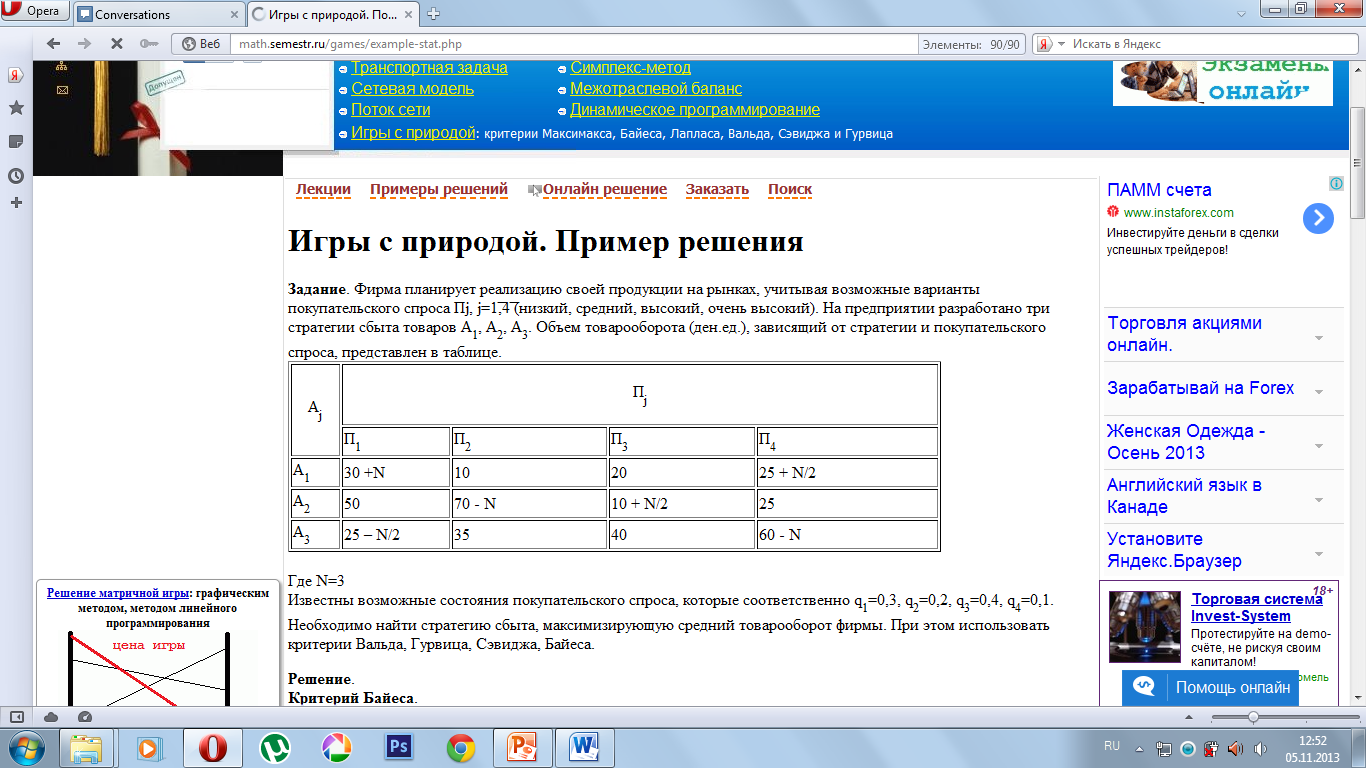


Таблица 1. Объем товарооборота, зависящий от стратегии и спроса

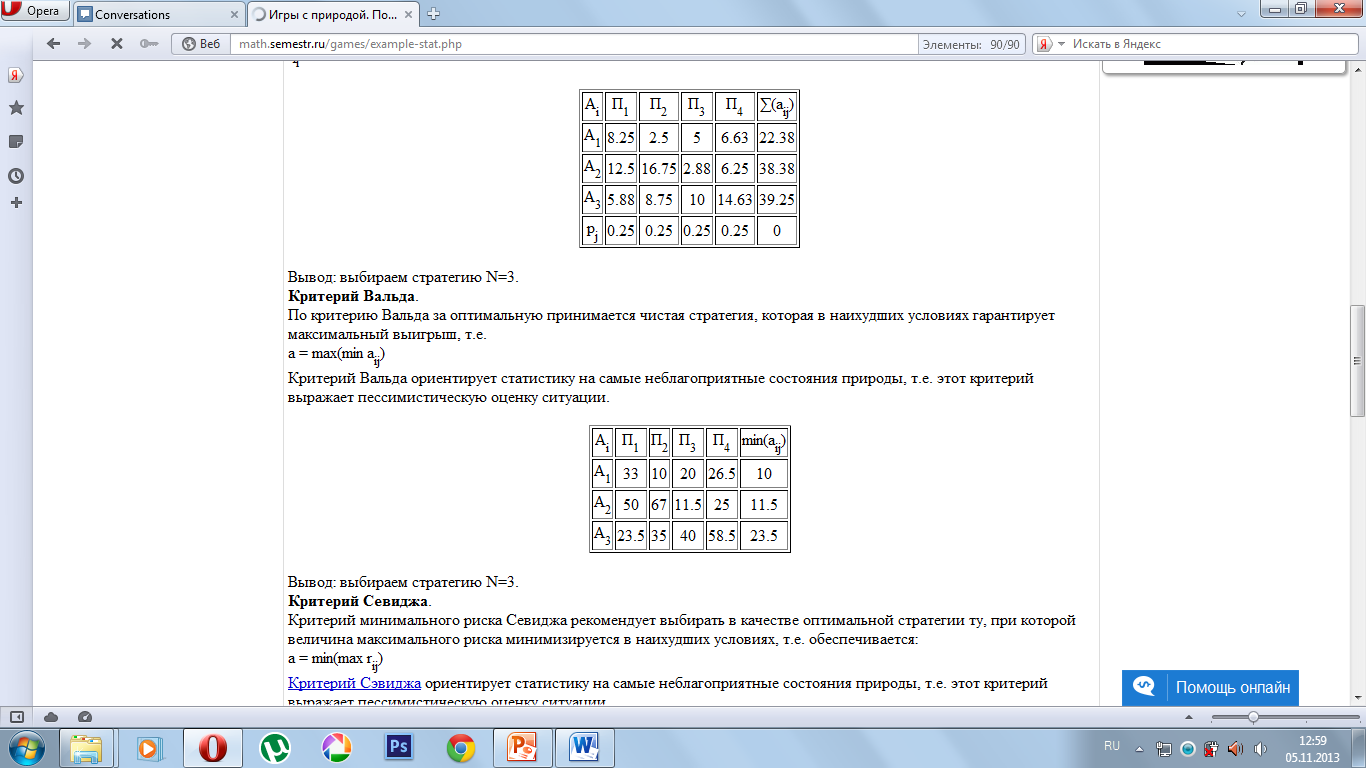
Где N=3

Известны возможные состояния покупательского спроса, которые соответственно q1=0,3, q2=0,2, q3=0,4, q4=0,1. Необходимо найти стратегию сбыта, максимизирующую средний товарооборот фирмы. При этом использовать критерии Гурвица, Сэвиджа, Байеса.

***Критерий Вальда.***

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е. a = max(min aij)

Критерий Вальда ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.



Вывод: выбираем стратегию N=3.

***Критерий Сэвиджа***

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается:

a = min(max rij)

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Находим матрицу рисков.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий. Максимальный выигрыш в j-м столбце bj = max(aij) характеризует благоприятность состояния природы.

1. Расчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

r11 = 50 - 33 = 17; r21 = 50 - 50 = 0; r31 = 50 - 23.5 = 26.5;

2. Расчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

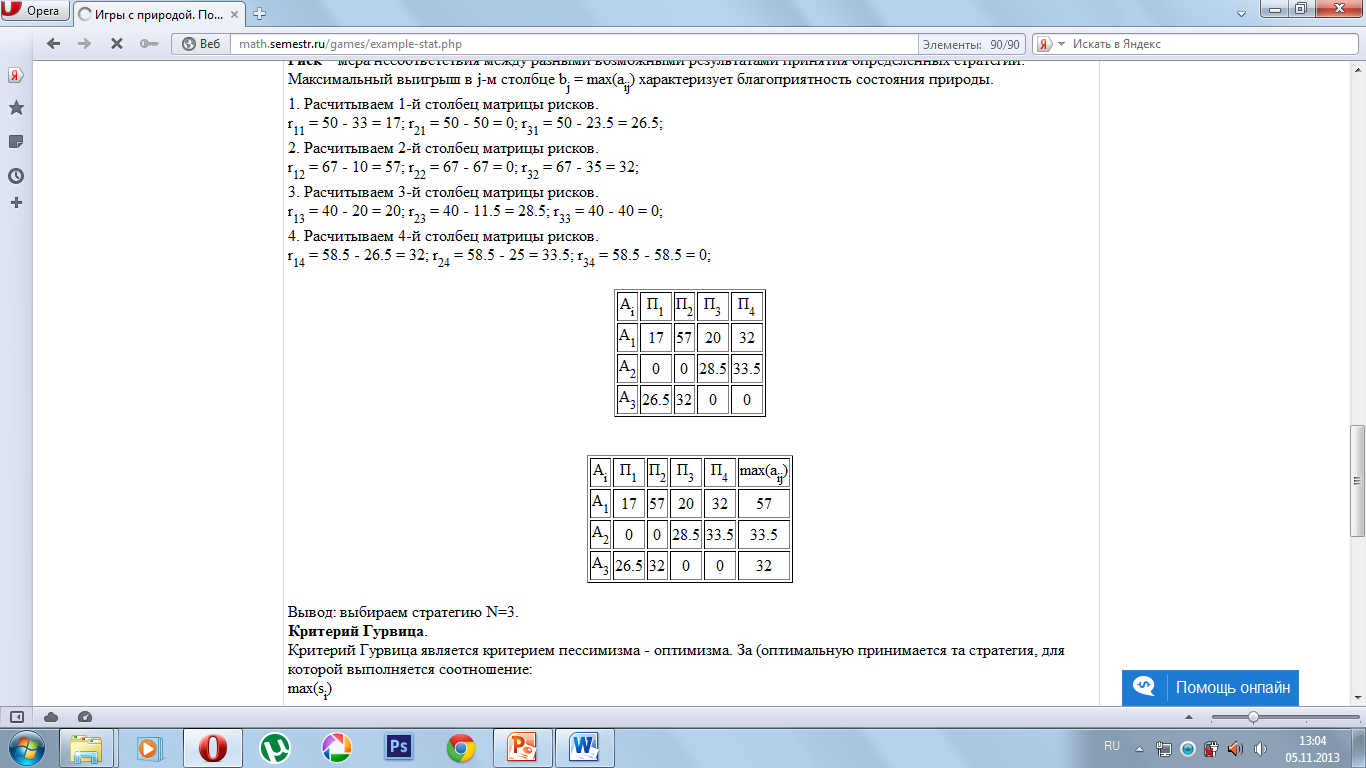
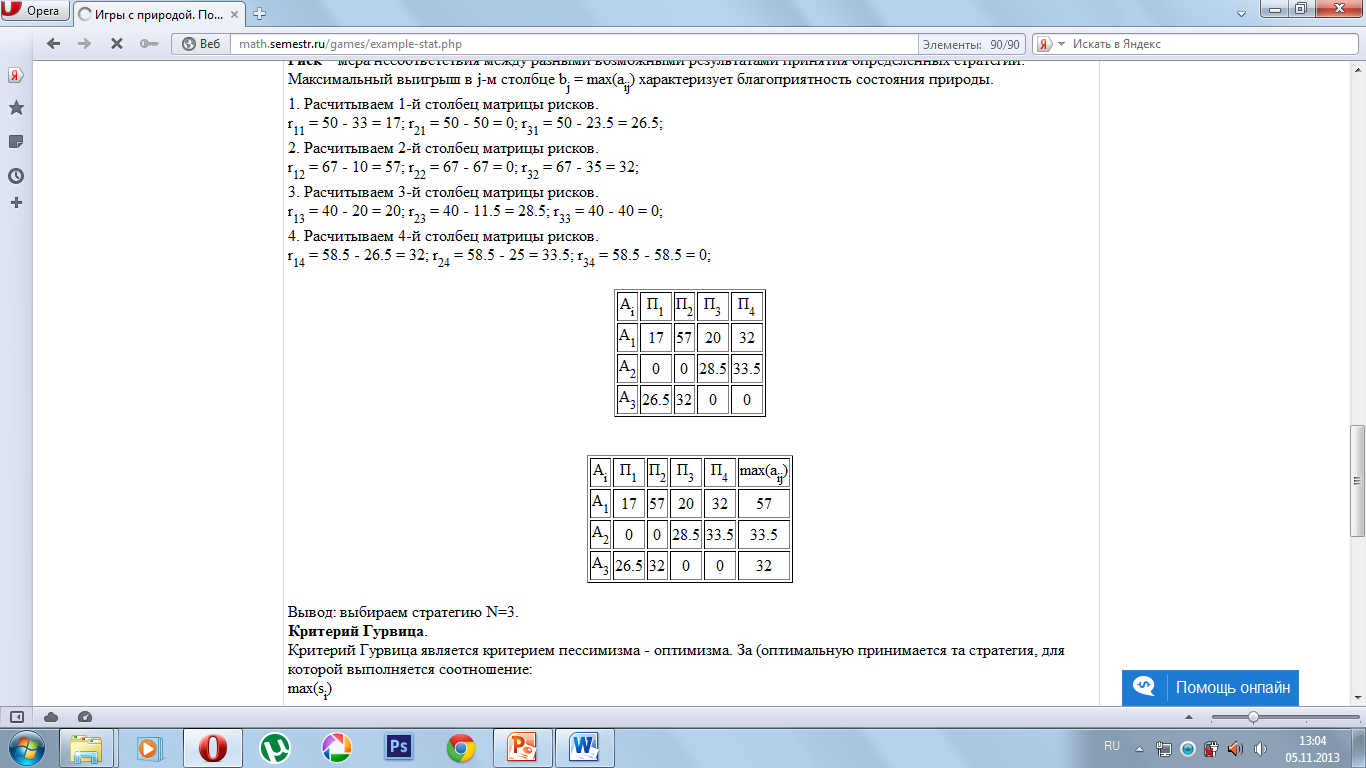
r12 = 67 - 10 = 57; r22 = 67 - 67 = 0; r32 = 67 - 35 = 32;

3. Расчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

r13 = 40 - 20 = 20; r23 = 40 - 11.5 = 28.5; r33 = 40 - 40 = 0;

4. Расчитываем 4-й столбец матрицы рисков.

r14 = 58.5 - 26.5 = 32; r24 = 58.5 - 25 = 33.5; r34 = 58.5 - 58.5 = 0;

*Вывод:* выбираем стратегию N=3.

***Критерий Гурвица***

Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма. За (оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение: max(si)

где si = y min(aij) + (1-y)max(aij)

При y = 1 получим критерий Вальде, при y = 0 получим – оптимистический критерий (максимакс).

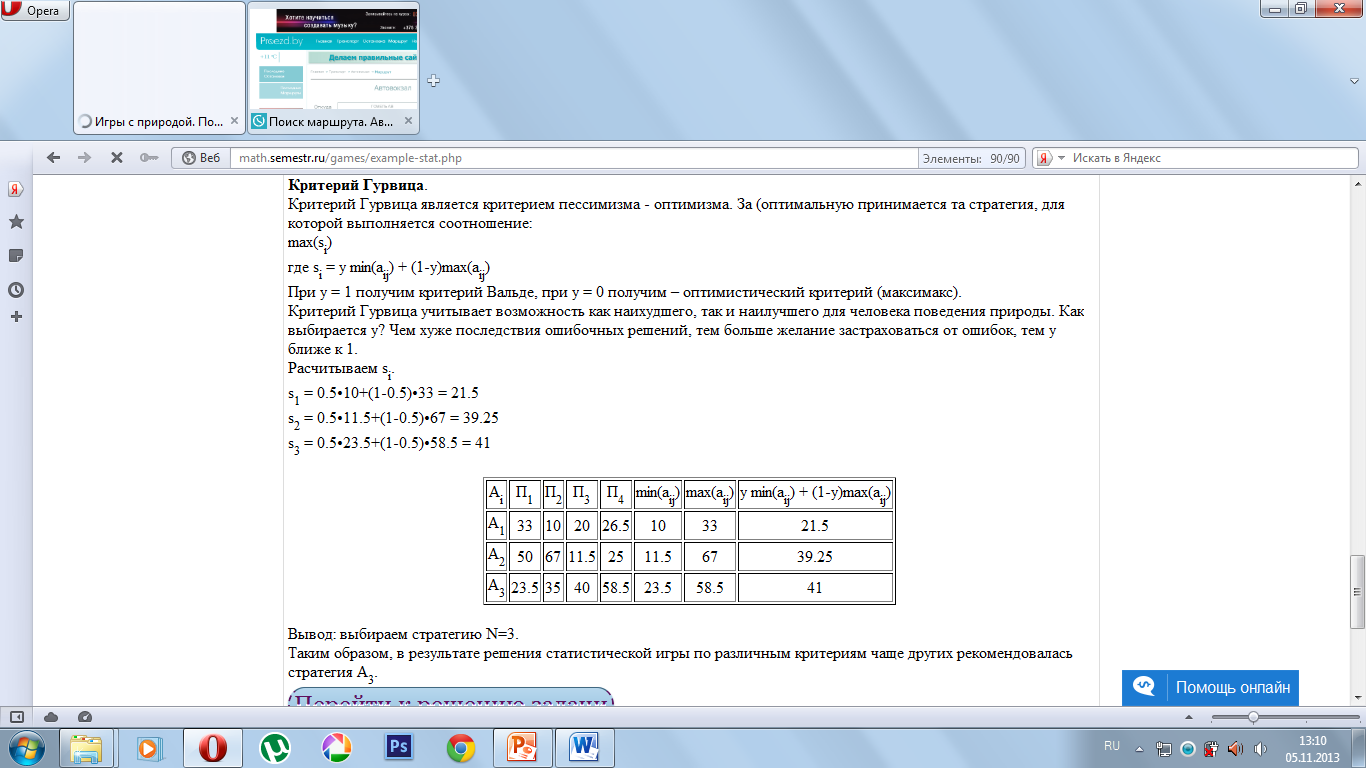
Критерий Гурвица учитывает возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. Как выбирается y? Чем хуже последствия ошибочных решений, тем больше желание застраховаться от ошибок, тем y ближе к 1.

Расчитываем si.

s1 = 0.5•10+(1-0.5)•33 = 21.5

s2 = 0.5•11.5+(1-0.5)•67 = 39.25

s3 = 0.5•23.5+(1-0.5)•58.5 = 41



*Вывод:* выбираем стратегию N=3.

*Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия A3.*

*Пример 2:* Предприятие выпускает мужские костюмы. Затраты предприятия в течение апреля-мая на производство единицы продукции составляют 30 ден. Единиц, а цена реализации 50 ден. Единиц. Из опыта работы следует, что предприятие может реализовать в течение этих месяцев при теплой погоде 600 костюмов, а при прохладной 1000 костюмов. Производственные мощности предприятия позволяют дополнительное количество продукции затратами на единицу продукции 40 ден. Единиц. Нереализованная в сроки продукция может быть реализована позже по сниженной цене в 20 ден. Единиц. Определить какое количество костюмов предприятие должно выпускать, чтобы получить максимальную прибыль.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Аi Пj | П1=600 | П2=1000 | min aij |
| А1=600 | 12000 | 16000 | **12000** |
| А2=1000 | 8000 | 20000 | 8000 |

Прибыль=Выручка-затраты.

Выручка=количество\*цена.

Затраты=количество\*затраты на единицу продукции.

а11=600\*50-600\*30=12000:

а12 =1000\*50-(600\*30+400\*40)=16000;

а21=(600\*50+400\*20)-1000\*30=8000;

а22=1000\*50-1000\*30=20000.

1. Критерий Вальда α= max min aij=12000.

i j

Соответствует стратегии А1=600

1. Критерий Сэвиджа S= min max rij

i j

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ai Пj | П1=600 | П2=1000 | max rij |
| А1=600 | 0 | 4000 | **4000** |
| А2=1000 | 4000 | 0 | **4000** |

Соответствует стратегии А1 и А2.

1. Критерий Гурвица =max { λ min aij +(1- λ ) max aij}, 0 < λ< 1. λ = 0,6

i j

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пj  Ai | П1=600 | П2=1000 | min aij | 0,6min  aij | max rij | 0,4max rij | max {…} |
| А1=600 | 12000 | 16000 | 12000 | 7200 | 16000 | 6400 | **13 600** |
| А2=1000 | 8000 | 20000 | 8000 | 4800 | 20000 | 8000 | 12 800 |

Соответствует стратегии А1=13 600

*Вывод: по всем трем критериям соответствует стратегия А1.*